2021 秋数学分析 B1 第 4 次习题课讲义

——期中复习篇

宗语轩[1]

分析是极限的艺术.

——— 任广斌

要做艺术的数学, 不要做工匠的数学.

——— 程艺

数无形时少直觉, 形少数时难入微. 数与形, 本是相倚依, 焉能分作两边飞.

——— 华罗庚

---

1. 知识点梳理

1.1. 极限

$$
\text{性质}\begin{cases}
\textbf{极限唯一}\text{: 保证定义的合理性} \\
\textbf{局部}\text{: 数列: 有限项不能改变数列的收敛性; 函数: } x_0 \text{ 点处收敛性只需考察 } x_0 \text{ 的邻域内} \\
\textbf{有界}\text{: 数列: 收敛必有界; 函数: } x_0 \text{ 点处收敛} \Rightarrow x_0 \text{ 点附近有界} \\
\textbf{保序} \\
\textbf{保四则运算}\text{ (除法运算中分母极限不为 0).}
\end{cases};
$$

[1]就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系. 讲义如有错误欢迎联系我:zyx240014@mail.ustc.edu.cn. 我的个人主页:http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html

$$\text{数列/函数收敛的证明方法}\begin{cases}\text{"}\varepsilon-N\text{"/"}\delta-N\text{" 语言定义法}\\ \text{数列: 单调有界定理}\\ \text{Cauchy 收敛准则}\\ \text{夹逼原理}\\ \text{stolz 定理/L'Hospital 法则}\\ \text{数列: 比值判别法}\end{cases}$$

$$\text{数列/函数发散的证明方法}\begin{cases}\text{"}\varepsilon-N\text{"/"}\delta-N\text{" 语言定义法}\\ \text{无界}\\ \text{Cauchy 收敛准则}\\ \text{子列收敛于不同极限, 函数中左右极限不相等}\end{cases}$$

列紧性: 有界数列必有收敛子列.

函数极限与数列极限的关系: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Longleftrightarrow \forall x_n\to x_0(x_n\neq x_0), \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=l$.
这里的 l 可以是有限数, 也可以是无穷.

函数极限的相容性: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l, \lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0 \xrightarrow{g(t)\neq x_0, t\neq t_0} \lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=l$.
思考: 若去掉 $g(t)\neq x_0, t\neq t_0$ 条件, 结论是否仍成立? **(详见本讲义第 2 部分)**

概念区别: 发散 $\supset$ 无界 $\supset$ 无穷大.

1.2. 连续

1. 函数在 x_0 处连续: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$$\text{性质}\begin{cases}\textbf{保邻近 (局部性质): } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\\ \textbf{换次序: } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)\\ \textbf{离散判别: } \text{对 } x_n\to x_0 \text{ 且 } x_n\neq x_0, \text{有 } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)\\ \textbf{左右连续: } \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\\ \textbf{保四则运算 } \text{(除法运算中分母极限不为 0)}\\ \textbf{保复合运算}\\ \textbf{极限与绝对值可交换: } \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|\textbf{(逆命题不成立, 详见本讲义第 2 部分)}\end{cases}$$

x_0 **是** f **的间断点**: x_0 是 f 不是连续点.

- **第一类间断点** $\begin{cases} \textbf{可去间断点:} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0) \\ \textbf{跳跃间断点:} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \end{cases}$
- **第二类间断点:** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少一个不存在.

连续函数存在反函数的充要条件: 严格递增.

2. 闭区间上的连续函数

$$\text{性质} \begin{cases} \text{介值性} \\ \text{有界性} \\ \text{取到最大值和最小值} \\ \text{值域是闭区间} \\ \text{一致连续} \end{cases}$$

3. f **在区间** I **上一致连续:**
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall x_0 \in I$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
注: 给定 $\varepsilon > 0$, 对不同的 x_0, $\delta(\varepsilon, x_0)$ 可能不同.

对任意 $\varepsilon > 0$**, 一致由公共** δ **体现:**

- **一致连续:** 公共 δ, 即 $\delta = \delta(\varepsilon)$.
- **非一致连续:** 非公共 δ, 即 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

命题 1: 对 $\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset I, \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0 \xrightarrow{f\text{在}I\text{上一致连续}} \lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
注: 逆命题不成立. 例如: $f(x) = \sqrt{x}, x \geqslant 0$.

等价刻画:

- **Cauchy 判别准则形式:**
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

- **极限表达形式:**

$$\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{\substack{\forall x_1,x_2\in I\\ |x_1-x_2|<\delta}}|f(x_1)-f(x_2)|=0.$$

连续与一致连续的区别 $\begin{cases}\textbf{一致连续}\text{: 整体}\\ \textbf{连续}\text{: 局部, 亦称逐点连续}\end{cases}$

常用判别法: 若 f 在区间 I 上可导, 则 f' 有界 $\xrightarrow[Lipschitz]{\text{微分中值定理}}$ f 在 I 上一致连续.

推广 1: 若 f 在 $[a,+\infty]$ 上连续, 且对 $\forall x_0>a$, f' 在 $[x_0,+\infty]$ 上有界, 则 f 在 $[a,+\infty]$ 上一致连续. (如 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续)

推广 2: 若 f 在 x_0 处连续, 且对 $\forall a>0$, f' 在 $\mathbb{R}\backslash(x_0-a,x_0+a)$ 上有界, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

命题 2: f 在 $[a,+\infty]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\Longrightarrow$ f 在 $[a,+\infty]$ 上一致连续.

命题 3: f 在 $(a,b],[b,c)$ 上一致连续 $\Longrightarrow$ f 在 (a,c) 上一致连续.

命题 4: f,g 在 $[a,+\infty)$ 上有界且一致连续 $\Longrightarrow$ fg 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

注意: 有界不能省略, 反例:$f(x)=g(x)=x,x\in\mathbb{R}^+$. 若把无穷区间换成有穷区间, 则有界可省略, 因为有穷区间的一致连续性包含有界 **(详见本讲义第 2 部分)**.

命题 5: f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 f 是周期函数 $\Longrightarrow$ f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

另: 一个一致连续的函数, 其反函数未必一致连续. 例如: $f(x)=\ln x, x>1$.

其他有关一致连续的内容请详见群文件—补充资料中余启帆助教撰写的《关于连续与一致连续的讨论》.

1.3 一元微分学

导数的重要性在于导数是变化率, 是描绘万物变化的重要手段, 是研究对象联系的关键工具.

1. 导数

f 在 x_0 处**可导**定义: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}:=f'(x_0)$ 存在且有限, **局部**概念.($\dfrac{0}{0}$ 型极限)

等价定义: $f'_+(x_0):=\lim\limits_{\triangle x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}:=f'_-(x_0)$

f 在 x_0 处可导 $\Rightarrow f$ 在 x_0 处连续.
思考:f 是否在 x_0 的某个邻域内连续? **(详见本讲义第 2 部分)**

自行回顾如下内容:
导数的四则运算
链式 (复合函数) 求导法则
反函数求导法则
所有初等函数的求导公式
用 Leibniz 法则计算高阶导数
幂指数型求导
隐函数求导 (微分)
参数方程表示函数的求导 (微分)

函数极限与数列极限的关系: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall x_n \to x_0 (x_n \neq x_0), \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.
这里的 l 可以是有限数, 也可以是无穷.

2. 微分

f 在 x_0 处**可微**定义: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \lambda \triangle x + o(\triangle x), \triangle x \to 0$.

- $\lambda = f'(x_0)$ 唯一.
- $\lambda \triangle x$ 称为 f 在 x_0 处微分. 记为 $\mathrm{d}y := \lambda \triangle x = f'(x_0) \triangle x$.
- 导数 = 微商: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, 分子分母有独立意义. $\mathrm{d}f$ 是 $\mathrm{d}x$ 的线性函数.

在**一元**微分学中, **可导** $\Longleftrightarrow$ **可微**.

一阶微分形式的不变性:
$z = f(y), y = g(x) \Longrightarrow \mathrm{d}z = f'(y)\mathrm{d}y = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = (f(g(x)))'\mathrm{d}x$.

3. 微分中值定理

自行回顾如下内容 **(后三个定理都是考试常考点)**:
Fermat 定理
Rolle 定理
Cauchy 定理

Lagrange 定理

想掌握一些凑微分形式的技巧, 详见群文件—补充资料的《一些常见的凑微分形式》

Darboux 定理

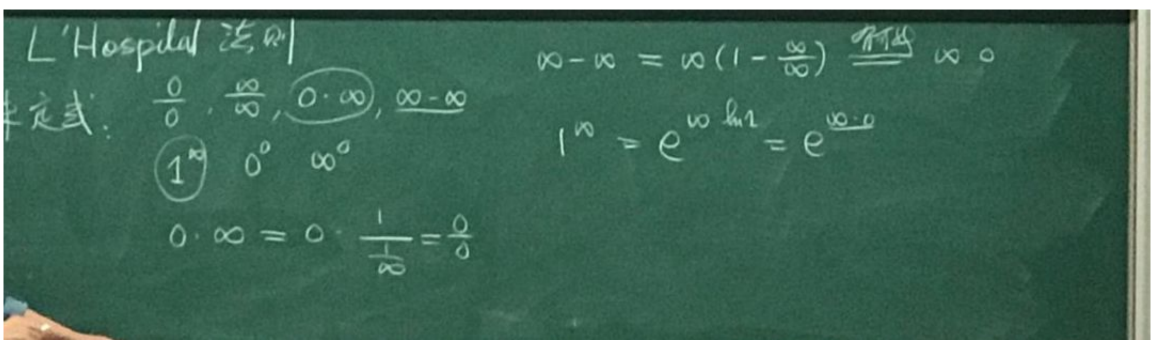
- **导函数具有介值性**. 应用如下:
  (1) 设 $f(x)$ 在 I 上可导, 对 $\forall x \in I$, 均有 $f'(x) \neq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$.
  (2) 若 $f(x)$ 的值域不是区间, 则 $f(x)$ 不能作为导函数 (无原函数).

- **导函数无第一类间断点**: $f'(x_0^+)$ 存在 $\Longrightarrow f'_+(x_0) = f'(x_0^+)$.

注意区分概念: $f'_\pm(x_0)$ 和 $f'(x_0^\pm)$

4. 应用

- **L'Hospital 法则:**



凑微分技巧的应用:
设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续,$\alpha \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x) + xf'(x)) = \beta$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\beta}{\alpha}$.
提示.$\alpha f(x) + xf'(x) = \dfrac{(x^\alpha f(x))'}{x^{\alpha-1}}$, 并运用 L'Hospital 法则.

- **函数的单调性和凸性:**
  翻阅教材 3.5, 自行回顾如下内容:
  如何确定函数的单调区间?
  如何确定函数的驻点是否为极值点?
  如何确定函数的凹凸性和拐点?
  凸函数的定义、性质及应用 (教材中的定理 3.27,3.28 一定要会灵活运用)

例 1. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且除有限个点之外 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增.

提示. 把 $f(x)$ 剖分成有限个区间, 运用 Lagrange 中值定理证明 $f(x)$ 在每个区间上严格递增. 再考虑有限点处, 利用函数连续性及 **Darbox** 定理即可.

例 2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无界.

例 3. 开区间上凸函数一定连续.

提示. 证明左右导数存在且有限得到左右连续, 或证明差商局部有界得到局部 Lipschitz, 从而连续.

- **曲率计算**:
  函数形式: $\kappa(x)=\dfrac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}$
  参数方程形式: $\kappa(t)=\dfrac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{3/2}}$

5.Taylor 定理

- 函数 $f(x)$ 的 n 次具有 **Peano 余项的 Taylor 公式 (Maclaurin 公式中** $x_0=0$):
  $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n,\quad x\to x_0.$
- 函数 $f(x)$ 的 n 次具有 **Lagrange 余项的 Taylor 公式** (不妨 $x>x_0$):
  $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \zeta\in(x_0,x).$

要求掌握 $e^x,\sin x,\cos x,(1+x)^\alpha,\ln(1+x)$ 等函数的 Maclaurin 展开式.

应用: 通过估计余项, 计算极限或近似值. 本部分可参考群文件—补充资料里的《Taylor 公式总结》.

---

2. 判断与命题推断

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内每一个闭子区间上连续 $\Longleftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l,\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0\Longrightarrow\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))=l.$

3. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

4. $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Longleftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

5. $f(x)$ 在区间 I 上连续 $\Longleftrightarrow |f(x)|$ 在区间 I 上连续.

6. 若 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $f(x)=g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{Q}$ 成立 $\Longrightarrow f(x)=g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立.

7. 存在 $\mathbb{R}$ 上的处处不连续但值域是区间的函数 $f(x)$.

8. 开区间 I 上的单调函数无第二类间断点.

9. $f(x), g(x)$ 具有介值性 $\Longrightarrow f(x)+g(x)$ 具有介值性.

10. 存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$, 满足 $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$.

11. $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Longrightarrow \exists x_0$ 的邻域 I, 使得 $f(x)$ 在 I 上连续.

12. $f(x)$ 在区间 I 上可微, 且 $f'(x)$ 在区间 I 上单调 $\Longrightarrow f'(x)$ 在 I 上连续.

13. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微. 则 $f'(x)>0 \Longleftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上严格递增.

14. $f(x), g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Longrightarrow \max\{f(x),g(x)\}, \min\{f(x),g(x)\}$ 在 $x=x_0$ 处可微.

15. $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可微 $\Longrightarrow f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

16. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数, 且 $\exists c\in(a,b)$, 使得 $f(a)=f(c)=f(b)\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常值函数.

高能预警!!! 以下都是经 (ju) 典 (nan) 命题, 建议大家踊 (fang) 跃 (qi) 尝 (zhi) 试 (liao).

17. 若 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶导数均为 0, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内是常值函数.

18. 存在 $\mathbb{R}$ 上在无理点可微而在有理点不可微的连续函数 $f(x)$.

19. 存在处处连续但处处不可微的连续函数 $f(x)$.

20. 存在处处不单调的连续函数 $f(x)$.

参考答案:

1. $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x) = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $\quad \Leftarrow$.

2. $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases} 0, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$, $g(x) \equiv 0, x_0 = y_0 = 0$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{t \to t_0} f(g(t)) = 1$.

3. $\Rightarrow$. 用 Cauchy 准则形式证明; $\quad \Leftarrow$. 构造 $F(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x), x = a \\ f(x), \qquad x \in (a,b) \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x), x = b \end{cases}$. 证明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

4. $\Rightarrow$. 见 **3**; $\quad \not\Leftarrow$.$f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in (0,1)$.

5. $\Rightarrow$. 见教材习题 **2.1.4**; $\quad \not\Leftarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases} 1, \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1, \ x \notin \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$.

6. $\Rightarrow$. 利用有理数的稠密性, 对无理点通过有理数列逼近即可.

7. 正确. 例如: $g(x)=\begin{cases} 1-x, \ x \in \mathbb{Q} \\ x, \qquad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} g(\frac{1}{2}), \ x = 0 \\ g(x), \ x \neq 0, \frac{1}{2} \\ g(0), \ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

8. 正确. 对 $\forall x \in I$, 考虑定义域中的点列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n \downarrow x_0$. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x_0)$ 存在. 同理可知, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x_0)$ 存在.

9. $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \\ 1, \qquad x = 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -\sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \\ 0, \qquad\quad x = 0 \end{cases}$. 则 $(f+g)(x)=\begin{cases} 0, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$.

10. 错误. 反证: 假设存在, 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. 而 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 由连续函数的介值性知 $g(x) \equiv c, c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. 而 $f(c) = 2c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, 这与 $f: \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ 矛盾.

11. $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x) = x^2 D(x), x_0 = 0$.

12. $\Rightarrow$. 导函数无第一类间断点 $+$**8**$\Rightarrow$ 导函数无间断点.

13. $\Rightarrow$. 见教材 **3.5**; $\not\Leftarrow$. 反例: $f(x)=x^3, x\in(-1,1)$.

14. $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x)=x, g(x)\equiv 0, x_0=0$.

15. $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

16. $\Rightarrow$. 见教材**定理 3.27**.

17. 错误. 反例: $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. $f(x)$ 在 $x=0$ 处任意阶导数是 0 的证明详见**《数学分析教程 上册》p206-p207**.

18. 正确. 例如: $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}, \mathbb{Q}=\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$(其中 $\bigsqcup$ 表示无交并).

19. 正确. 例如: $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\cos(b^k\pi x)$. 其中 $0<a<1, b$ 为正奇数,$ab>1+\dfrac{3\pi}{2}$.

20. 正确. 例如: $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_0(4^{k-1}x)}{4^{k-1}}$. 其中 $f_0(x)$ 是周期为 1 且当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 满足 $f_0(x)=|x|$ 的周期函数.

---

3. 补充习题

1. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}((n+\ln n)^\alpha-n^\alpha)\ (\alpha\in(0,1))$.

提示. $0<n^\alpha[(1+\dfrac{\ln n}{n})^\alpha-1]<\dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^{1-\alpha}}<\dfrac{\ln n}{n^{1-\alpha}}$.

2. 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且存在常数 L 和 $\alpha>1$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L\,|x-y|^\alpha \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

求证: $f(x)$ 是常数.

证明. 对 $\forall x_0\in\mathbb{R}$, 有 $\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant L|x-x_0|^{\alpha-1}\xrightarrow{x\to x_0}0$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, 即 $f'(x_0)=0$. 由 x_0 的任意性知, $f'(x)\equiv 0$. 故 $f(x)$ 是常数. ∎

注意. 本题不能直接用微分中值定理, 题目中没有出现 $f(x)$ 可导的条件.

3. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数, $f(x)=\sin g(x)$. 求证: $f(x)$ 在任意点 x_0 的左右极限都存在.

提示. $f(t)=\sin t$ 连续, $g(x)$ 无第二类间断点 (详见本讲义第 **2** 部分 **T8**).

4. 设函数 $f(x):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 一致连续, $\alpha\in(0,1]$. 求证: 函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

提示. 先证明 $g(x)=x^{\alpha}$ 在 $[0,+\infty]$ 上一致连续, 再由一致连续复合的相容性即得证.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}=0$.

证明. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|<n\varepsilon$. 设 $M>\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\{a_k\}$. 取 $N_0=\max\{[\dfrac{M}{\varepsilon}]+1,N\}$, 当 $n>N_0$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}\right|<\left|\frac{\max\{M,n\varepsilon\}}{n}\right|\leqslant\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}=0$. ∎

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且满足 $f''(x)=e^xf(x)$, $f(a)=f(b)=0$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

证明. 反证: 若 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $|f(\xi)|=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|>0$. 不妨 $f(\xi)>0$, 此时 $f'(\xi)=0,f''(\xi)<0$. 而 $f''(\xi)=e^{\xi}f(\xi)>0$, 矛盾. ∎

7. 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数且对任意 x,y 有

$$|xf(y)-yf(x)|\leqslant M|x|+M|y|,$$

其中 $M>0$. 求证:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛;

(2) 存在常数 a 使得对任意 x, 有 $|f(x)-ax|\leqslant M$.

证明. (1) 对 $\forall x, y \neq 0$, 两边同时除以 $|xy|$, 有

$$\left|\frac{f(y)}{y} - \frac{f(x)}{x}\right| \leqslant M\left|\frac{1}{x}\right| + M\left|\frac{1}{y}\right|$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \dfrac{2M}{\varepsilon}$, 当 $|x|, |y| > X$ 时, 有

$$\left|\frac{f(y)}{y} - \frac{f(x)}{x}\right| \leqslant M\left|\frac{1}{x}\right| + M\left|\frac{1}{y}\right| < \frac{2M}{X} = \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 收敛.

(2) $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. 令 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. 取 $y = 0$ 可知 $|f(0)| \leqslant M$ 成立.

当 $x \neq 0$ 时, 即证 $|g(x) - a| \leqslant \dfrac{M}{|x|}$. 反证: 若 $\exists x_0 \neq 0$, 使得 $|g(x_0) - a| > \dfrac{M}{|x_0|}$ $\quad (*)$

$$|g(x_0) - a| \leqslant |g(x_0) - g(y)| + |g(y) - a| \leqslant \frac{M}{|x_0|} + \frac{M}{|y|} + |g(y) - a|.$$

对上式令 $y \longrightarrow +\infty$, 得:$|g(x_0) - a| \leqslant \dfrac{M}{|x_0|}$, 这与 $(*)$ 矛盾. ∎

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微且满足 $f(0) = 0$ 及 $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$, $x \in [0,1]$. 求证: 在 $[0,1]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

证明. 设 $|f(x)|$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上有最大值 $|f(x_0)|$. 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (0, x_0)$, 使得 $2|f(x_0)| \leqslant \left|\dfrac{f(x_0)}{x_0}\right| = \left|\dfrac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0}\right| = |f'(\xi)| \leqslant |f(\xi)| \leqslant |f(x_0)| \Rightarrow f(x_0) = 0$. 故 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上恒为 0. 同理,$f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上恒为 0. 故 $f(x) \equiv 0, x \in [0,1]$. ∎

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(0) = 1$. 又当 $x \geqslant 0$ 时, $|f(x)| \leqslant e^{-x}$. 求证: 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

证明. 令 $g(x) = f(x) - e^{-x}$, 则 $g(0) = 0, g'(x) = f(x) + e^{-x}$. 由 $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ 知, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 若 $g(x) \equiv 0$, 则 $g'(x) \equiv 0$, 得证. 若 $\exists \xi > 0, g(\xi) \neq 0$, 由 $g(x)$ 的连续性及 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ 知, $\exists x_1 \in (0, \xi), x_2 \in (\xi, +\infty)$, 使得 $g(x_1) = g(x_2)$. 由 Rolle 定理知,$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, 使得 $f'(x_0) + e^{-x_0} = g'(x_0) = 0$. ∎

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (a,b)$, $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $a<\xi_1<\xi_2<b$, $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$;

(3) 存在 $\eta \in (a,b)$, $f''(\eta)=f(\eta)$.

证明. (1) 不妨 $f'(a),f'(b)>0$, 由导数定义知,$\exists\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)\cap(a,b)$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f'(a)}{2}>0.$$

故 $\exists x_1\in(a,a+\delta)\cap(a,b)$, 使得 $f(x_1)>0$. 同理,$\exists x_2\in(x_1,b)$, 使得 $f(x_2)<0$. 由零点存在定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=0$.
(2) 令 $g(x)=f(x)e^{-x}$, 则 $g(a)=g(\xi)=g(b)=0$. 由 Rolle 定理知, $\exists\xi_1\in(a,\xi),\xi_2\in(\xi,b)$, 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. 而 $g'(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x}$, 故 $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$.
(3) 令 $h(x)=(f'(x)-f(x))e^{x}$, 则 $h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$. 由 Rolle 定理知, $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $h'(\eta)=0$. 而 $h'(x)=(f''(x)-f(x))e^{x}$, 故 $f''(\eta)=f(\eta)$. ∎

11. 设函数 $f(x)$ 把有界闭区间 $[a,b]$ 映射到 $[a,b]$, 并且满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 任取 $x_1\in[a,b]$, 并归纳地定义 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 内一点 c, 且 $f(c)=c$.

12. 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证: $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上有界.
提示. 令 $g(x)=f^2(x)+\frac{1}{2}f'^2(x)$, 证明 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值即可.

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 假设存在 $x_0\in(a,b]$ 使得 $f'(x_0)=0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

证明. 考察 $g(x)=e^{-\frac{x}{b-a}}(f(x)-f(a))$. 只需证 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$ 即可. 若 $\eta\in(a,b]$, 使得 $f(\eta)=f(a)$, 则由 Rolle 定理知, $\xi\in(a,\eta)\subseteq(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$. 若对 $\forall x\in(a,b]$,$f(x)\neq f(a)$. 由 $f(x)$ 的连续性, 不妨设 $f(x)>f(a)$, 从而 $g'(x_0)<0$. 又由 Lagrange 中值定理知, $\exists\eta\in(a,b)$, 使得 $g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}>0$. 由 Darboux 定理知, $f'(x)$ 具有介值性. 故 $\exists\xi$ 在 x_0 和 η 之间, 使得 $g'(\xi)=0$. ∎

4. 课后思考

4.1. Newton 切线法求根

设定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的二阶可微函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)>0$, 且 $f(a)f(b)<0$.

1. 证明: 存在唯一的实数 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$.

2. 设 $x_0\in(a,b), f(x_0)>0$, 定义数列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}(n\in\mathbb{N})$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$.

4.2. $x^a\sin(x^b)$ 型函数探究

注: 此处暂不考虑该类函数的存在性问题

这类函数在 $x\to 0$ 或 $x\to+\infty$ 处具有震荡性质, 因此常被我们用来举反例.

设 $a,b\in\mathbb{R}, b>0$, 考察函数 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-b}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

证明如下结论:

1. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续 $\iff a>0$.

2. $f(x)$ 在 0 处可微 $\iff a>1$.

3. $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界 $\iff a\geqslant 1+b$.

4. $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续 $\iff a>1+b$.

5. $f'(x)$ 在 0 处可微 $\iff a>2+b$.

6. $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界 $\iff a\geqslant 2+2b$.

7. $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续 $\iff a>2+2b$.

设 $a\in\mathbb{R}, b\neq 0$, 考察函数 $g(x)=x^a\sin(x^b), x\neq 0$.

8. 分别讨论 $g(x)$ 在 $(0,1),(1,+\infty)$ 上一致连续时 a,b 及两者之间满足的关系.

通过构造 $x^a\sin(x^b)$ 型函数或类 $x^a\sin(x^b)$ 型函数来回答以下问题:

9. 举一个在 $(0,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

10. 举一个在 x_0 的任何邻域内都无界的函数 $f(x)$, 但当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\nrightarrow\infty$.

11. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限. 请举一个 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 不成立的例子.

12. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$. 请举一个 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\infty$ 不成立的例子.
